

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.004

УДК 539.32, 681.5

РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В СОВРЕМЕННЫХ САЕ-КОМПЛЕКСАХ И ЕЕ ВЕРИФИКАЦИЯ

В. Г. Теличко¹, Д. С. Чигинский², И. А. Чигинская³

Тульский государственный университет^{1,2,3}
Россия, г. Тула

¹ Д-р техн. наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7(952)0198465, e-mail: katranv@yandex.ru

² Канд. техн. наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7(920)2768672, e-mail: dmitriy@chiginskiy.ru

³ Аспирант кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7(920)2752912, e-mail: irtyla@yandex.ru

В данном исследовании рассматриваются современные подходы к определению напряженно-деформированного состояния тонкой пластины из начально-изотропного материала в связанной постановке под действием термомеханической нагрузки. Описываются методы решения задачи связанной термоупругости, в том числе в расчетном комплексе ANSYS, который теперь позволяет учитывать различное деформирование физически нелинейного материала при растяжении и сжатии. Решение осуществляется для элемента конструкции, выполненного из материала с физико-механическими характеристиками, зависящими от вида напряженно-деформированного состояния. Представлено численное решение связанной задачи для тонкой прямоугольной пластины с механической и термической нагрузкой с учетом физической нелинейности материала. Результаты сравниваются с полученными ранее решениями на основе известной теории деформирования разносопротивляющихся материалов с использованием объемных изопараметрических конечных элементов и учетом температурных эффектов.

Ключевые слова: разносопротивляемость, изотропия, связанность, термоупругость, пластинка, графит APB, метод конечных элементов, ANSYS, верификация.

Введение. Современная строительная отрасль постоянно находится в поиске новых материалов, а также методов расчёта конструкций, в том числе для того, чтобы улучшить качество и долговечность зданий и сооружений. Одним из важных направлений работы в этой области является расчёт элементов конструкций, выполненных из материалов с «усложненными» свойствами, которые обладают чувствительностью к виду напряженно-деформационного состояния (НДС) и известны также как разносопротивляющиеся [1, 2].

Исторический обзор показывает, что с момента появления теории деформирования разносопротивляющихся материалов в 1960-х годах было предложено множество моделей и определяющих соотношений для описания поведения указанных материалов [1-9]. Однако многие из них имели ограниченную применимость в реальных инженерных расчетах [1], в том числе из-за упрощений или неполного учета физических процессов. Тем не менее в последние десятилетия научное сообщество сделало значительные успехи в разработке универсальной теории деформирования материалов с разносопротивляемостью.

Важным прорывом в этой области стала теория, изложенная в работах А.А. Трещева и Н.М. Матченко [1, 2], которые предложили подход, позволяющий учесть сложные взаимо-

связи между напряженно-деформационным состоянием материала и его свойствами. Эта теория обладает потенциалом для широкого применения в различных инженерных областях.

Одним из ключевых аспектов при использовании материалов, чувствительных к НДС, является учет взаимосвязи между физическим полем напряжений и полем температуры [10, 11], что влияет на механическое поведение материала, а следовательно, и на надёжность и долговечность работы конструкции в условиях эксплуатации.

Например, в работе [10] для решения трехмерной связанной задачи термоупругости с использованием метода конечных элементов (МКЭ) рассматривается случай для пластин, а в работах [12-15] – случай для оболочек. При этом в работах [10–15] предполагается, что в каждый момент времени поддерживается постоянное значение температуры на поверхностях элемента конструкции, то есть рассматривается случай определения поля температуры с использованием граничных условий первого рода. В свою очередь, учёт граничных условий третьего рода [10, 16], отражающий закон теплообмена между поверхностью элемента и окружающей средой, позволяет расширить область применения разработанных решений на более широкий класс практических задач.

Практический формат исследования поведения элементов конструкций с учётом связанной термоупругости сопряжён с использованием программных комплексов, реализующих МКЭ, таких как ANSYS, ABAQUS, COMSOL, APM WinMachine и др. Причём функциональность специализированных расчетных комплексов, основанных на численном моделировании, благодаря теоретическим исследованиям непрерывно расширяется. Для примера, в расчетном инструменте ANSYS предусмотрена опциональность реализации нелинейной работы материалов посредством прямого задания экспериментальных диаграмм деформирования, включающая отдельное задание диаграмм состояния растяжения и сжатия [17].

Следует отметить, что использование новых программных комплексов, в основе которых лежит МКЭ, как и вообще применение любых методов вычислительной механики, требует тщательной проверки и доказательства достоверности получаемых результатов (верификации) путем проведения сравнительного анализа с апробированными теориями и/или экспериментальными данными [13, 14, 18, 19].

Для решения указанного вопроса в настоящей работе используется разработанное специально для [14, 18, 19] программное обеспечение, основанное на исследованиях М.Ю. Делягина и А.А. Трещева [1, 2, 10-15]. С использованием специально спроектированных объемных конечных элементов в форме тетраэдра учитывается воздействие температуры и задаются граничные условия третьего рода (конвективного теплообмена). Данный вариант решения задач связанной термоупругости, основанный на применении теории деформирования материалов чувствительных к виду напряженного состояния, позволяет эффективно прогнозировать НДС в рамках рассмотрения нестационарной задачи термомеханического изгиба тонкой прямоугольной пластины из начально-изотропного материала (графит АРВ [20,21]).

Постановка задачи. Основной решаемой прикладной задачей является определение НДС тонкой пластины размером $0,5 \times 0,3 \times 0,035$ м, жестко закрепленной по контуру (рис. 1). Рассматриваемая пластина располагается на разделе между двумя средами. Полагается, что начальная температура пластины – 298 К, а температуры сред, верхней и нижней соответственно, составляют $T_v = 373$ К и $T_n = 323$ К. Нагрев пластины осуществляется посредством конвективного теплообмена между её поверхностями и средами. Кроме перепада температур, верхняя поверхность пластины нагружается равномерно распределенной нагрузкой в диапазоне от 0 до 1,25 МПа. Материалом пластины принят конструкционный графит АРВ [20], с учётом задания физических констант согласно публикации А.А. Трещева [2].

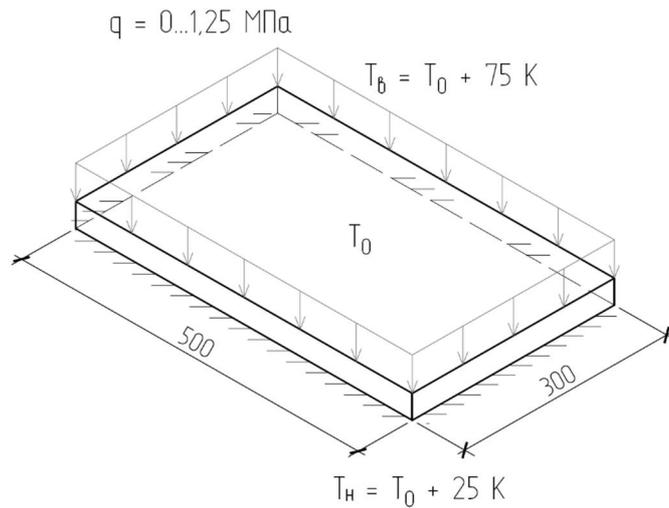


Рис. 1. Исследуемая пластинка (расчетная схема, схематично)

Решение задачи такого типа весьма важно для механики, так как оно будет способствовать развитию теории деформирования и прочности материалов, которые по-разному ведут себя при растяжении и сжатии, и позволит в будущем эффективно использовать данную опцию ANSYS для проведения расчетов элементарных конструкций в условиях термомеханической нагрузки и связанности физических полей различной природы.

Методы исследования. Авторы статьи предлагают рассмотреть два варианта решения связанной термомеханической задачи. Приведем некоторые соответствующие теоретические положения.

В настоящей работе для верификации возможностей, предоставляемых комплексом ANSYS, была использована программа, разработанная в [14], авторами которой было предложено расширить нелинейные потенциалы деформаций А.А. Трещёва и Н.М. Матченко на случай термомеханического воздействия. Соответственно, как следует из работ [1,10,11], учитывается следующий вид термодинамического потенциала Гиббса (1), состоящего из квазилинейного, нелинейного и термомеханического слагаемых:

$$\begin{aligned} \Gamma = & (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + \\ & + \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^n + \\ & + \left[(b_{11} \xi + b_{12}) \sigma + b_{11} \eta \tau \right] \theta + C_\sigma \frac{(\theta)^2}{2T_0} \end{aligned} \quad (1)$$

где σ – нормальные компоненты тензора напряжений на октаэдрической площадке; τ – касательные компоненты; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ – девиатор напряжений; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ – модуль вектора полного напряжения; ξ , η – отнесенные к модулю вектора полного напряжения нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; $A_e \dots E_p$ – константы потенциала деформаций (1); φ – фаза напряжений, $\cos 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3$; C_σ – теплоёмкость материала, $\theta = T - T_0$ – изменение температуры в точке тела; T – значение температуры в рассматриваемый момент времени; T_0 – начальная температура; b_{11} и b_{12} – температурные константы [10].

Система уравнений, построенная в рамках использования МКЭ [12, 18, 19], для решения прикладных задач связанной термоупругости при допущении $\theta/T_0 \ll 1$ (в точке тела каждом шаге расчёта) и нагружении, приведенном к статическому (квазистатическая задача), будет описываться следующим уравнением [11]:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{T}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

здесь $[K]$ – матрица жёсткости конечного элемента (КЭ) в локальной системе координат (ЛСК), для КЭ в форме четырехузлового тетраэдра, при рассмотрении механического нагружения; $[K^{ut}]$ – термоупругая составляющая; $[K^t]$ – матрица, характеризующая процессы теплопроводности; $[C^t]$ – матрица температурного затухания; $[C^{tu}]$ – матрица термоупругого затухания; $\{u\}$ – вектор неизвестных узловых перемещений; $\{T\}$ – вектор значений температуры в узлах сетки; $\{\bar{u}\}$ – вектор скоростей, производных от $\{u\}$; $\{\bar{T}\}$ – вектор скоростей изменения (или по-другому – производных) $\{T\}$ во времени. Аппроксимируя производные от величин по времени, используем эффективную разностную схему повышенной точности, описанную в работах [1] и [15]; дополнительно: $\{F\}$ – вектор узловых нагрузок; $\{Q\}$ – то же для температуры.

Первая строка в (2) соответствует уравнениям равновесия, а вторая – уравнению теплопроводности Фурье при малых изменениях температур. Эти уравнения решаются совместно. Учитывая разностную схему [15], выражение (2) будет преобразовано к виду:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left\{ \frac{u - u_{i-1}}{\Delta t} \right\} \\ \left\{ \frac{T - T_{i-1}}{\Delta t} \right\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где Δt – переменный в общем случае шаг по времени (для удобства может быть принят постоянным), необходим для дифференцирования временной переменной, u_{i-1} , T_{i-1} – соответственно, значения перемещений и температур на предыдущем временном шаге [15].

Соответственно, для отдельного шага по времени уравнение (3) примет вид:

$$\begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ \left[\frac{1}{\Delta t} C^{tu} \right] & \left[K^t + \frac{1}{\Delta t} C^t \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \left\{ Q + \frac{1}{\Delta t} [C^{tu}] \{u_{i-1}\} + [C^t] \frac{\{T_{i-1}\}}{\Delta t} \right\} \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Матрица жёсткости конечного элемента при механическом нагружении определяется в [18] по стандартной формуле:

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D][B] dx \cdot dy \cdot dz,$$

где $[B]$ – матрица деформаций КЭ в виде тетраэдра; $[D]$ – матрица упругости.

Для нахождения матрицы упругости $[D]$ в работе [13, 14] получена связь напряжений и деформаций путём применения формул Кастильяно к потенциалу (1) без учета температуры:

$$e_{ij} = A_{ijkm} \sigma_{km},$$

где $[D_{ijkm}] = [A_{ijkm}]^{-1}$ – симметричная матрица упругости (податливости A_{ijkm}); индексы $i - m$ меняются в диапазоне $1 \dots 3$.

Вывод остальных компонентов матриц для КЭ (рис. 2) из уравнений (2)-(4) подробно рассмотрен в работах [12, 14].

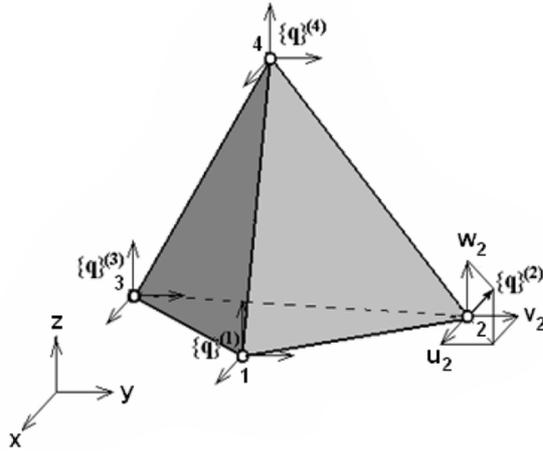


Рис. 2. ЛСК в узлах рассматриваемого КЭ

В начале расчетной процедуры предполагаются нулевые начальные напряжения и равномерное распределение температуры. Для организации нагрева конструктивного элемента применялись граничные условия, соответствующие условиям конвективного теплообмена [16]. Заметим, что среди массива начальных условий обязательно должны быть данные о распределении скоростей тепла и иных параметров:

$$u_i(\bar{x}, t_0) = f_i(\bar{x}); u_{i,t}(\bar{x}, t_0) = g_i(\bar{x}); T(\bar{x}, t_0) = h_i(\bar{x}),$$

здесь t_0 – начальный момент времени; $f_i(\bar{x})$, $f_i(\bar{x}) = 0$ – функция распределения перемещений при t_0 определяется нулевым начальным НДС; $g_i(\bar{x})$ – функция распределения начальных скоростей по объёму задаётся нулевым; $h_i(\bar{x})$ – функция начальных температур.

Решение задач по термомеханическому деформированию несущих элементов выполняется при начальных условиях распределения температуры, которые характеризуются неоднородностью, представленной в форме

$$h_i(\bar{x}) = T_0 + \theta_e, \bar{x} \in A_e; h_i(\bar{x}) = T_0 + \theta_n, \bar{x} \in A_n; h_i(\bar{x}) = T_0, \bar{x} \notin A_e \text{ и } \bar{x} \notin A_n.$$

Распределение температуры по поверхности в момент времени t_0 формализовано следующими условиями:

$$\begin{cases} \theta(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_n, t > 0, \\ \theta(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_e, t > 0; \end{cases}$$

где T_0 – температура в начальный момент времени; изменение начальной температуры на поверхностях пластины (см. рис. 1): θ_e (верхняя – A_e) и θ_n (нижняя – A_n).

В работе [13] подчеркивается важность выбора закона распространения тепла в материале через поверхность несущего элемента:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(\bar{x}, t)}{\partial \bar{n}} = \mu_T \cdot [T(\bar{x}, t) - T_0],$$

при $\bar{x} \in A$, $t > 0$ – в выражении выше использованы следующие обозначения: λ , μ_T – коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи; \bar{n} – нормаль к поверхности изучаемого элемента, которая определяет вектор направления процесса теплообмена в точке.

Примем, что теплообмен через поверхности элемента не влияет на изменение температуры поверхности, но инициирует процесс, результаты которого, по предположению, будут определяться на основе линейного соотношения.

Решение проводится с учетом наличия существенной с точки зрения значимости нелинейной взаимосвязи между напряжениями и деформациями, а также между механическими свойствами материалов и компонентами тензора напряжений. Этот момент подчеркивает сложность и важность данного исследования. Мы также изучаем тонкие пластины с учетом только малых перемещений (до одной десятой от общей толщины пластины) [2]. Для подобных задач здесь фигурирует явление, которое в системах САЕ называется «P-delta» и относится к фактору геометрической нелинейности. Этот эффект заключается в том, что силы в опорных точках связаны с прогибом средней поверхности пластины с помощью функциональной зависимости. Чтобы правильно учесть эту взаимосвязь, нужно учесть изменение напряженно-деформируемого состояния пластины, прикладывая нагрузку в форме дискретных значений – пошагово. На каждом шаге нагрузка прикладывается к уже деформированной схеме [13].

Этот алгоритм для численной реализации процедуры учета геометрической нелинейности также может быть использован, когда мы имеем дело с двухфакторной нелинейностью [13-15]. В этом случае вторым фактором будет нагрузка, вызванная изменением температуры, учитывая при этом изменение физико-механических свойств материала от вида напряженного состояния, очевидно также влияющих на распределение температуры. Особенность реализации МКЭ при двухфакторной нелинейности заключается в изменении топологии сетки на каждом этапе приложения нагрузки [13, 14]. Этот процесс включает учет деформируемости модели как при силовом, так и при тепловом воздействии [15]. Важно также контролировать допустимую погрешность, которая определяется итерационным процессом внутри каждого этапа без учета изменения геометрии модели. Данный алгоритм полностью формализован в работах А.А. Трещева и М.Ю. Делягина [11, 13].

Далее рассмотрим соотношения, используемые в ПК ANSYS для решения задачи нестационарной теплопроводности. Согласно [17] в пакете ANSYS связь между напряжениями и деформациями определяется как

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\}, \quad (5)$$

где $\{\sigma\}$ – вектор напряжений; $[D]$ – матрица упругости; $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$ – вектор упругих деформаций; $\{\varepsilon\}$ – вектор полной деформации; $\{\varepsilon^{th}\}$ – вектор тепловой деформации.

Уравнение (5) также возможно переписать:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{th}\} + [D]^{-1}\{\sigma\}. \quad (6)$$

Для трехмерного случая вектор тепловой деформации в ANSYS имеет вид:

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T [\alpha_x^{se} \alpha_y^{se} \alpha_z^{se} 0 0 0]^T, \quad (7)$$

где $\alpha_x^{se}, \alpha_y^{se}, \alpha_z^{se}$ – компоненты коэффициента теплового расширения; $\Delta T = T - T_{ref}$ – изменение температуры; T – текущая температура в рассматриваемой точке; T_{ref} – начальная температура.

Матрица упругости $[D]^{-1}$ вычисляется в комплексе ANSYS следующим образом:

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Кроме того, предполагается, что матрица $[D]^{-1}$ (8) симметрична, таким образом:

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}; \quad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}; \quad \frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y}.$$

Если модули сдвига G_{xy} , G_{yz} и G_{xz} не введены для изотропных материалов, они вычисляются следующим образом:

$$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = \frac{E_x}{2(1+\nu_{xy})}.$$

Связанные термоупругие определяющие уравнения в ANSYS основаны на теории [22] и имеют следующий вид:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\beta\}\Delta T, \quad Q = T_0\{\beta\}^T\{\varepsilon\} + \rho C_v \Delta T, \quad (9)$$

где $\{\beta\} = [D]\{\alpha\}$ – вектор термоупругих коэффициентов; $C_v = C_p - \frac{T_0}{\rho}\{\alpha\}^T\{\beta\}$ – удельная теплота при постоянной деформации или объеме; Q – плотность теплоты.

Подставив Q из уравнения (9) в уравнение теплового потока, можно записать:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = T_0\{\beta\}^T \frac{\partial \{\varepsilon\}}{\partial t} + \rho C_v \frac{\partial (\Delta T)}{\partial t} - [K]\nabla^2 T,$$

где $[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}$ – матрица теплопроводности.

При решении связанной нестационарной задачи термомеханического изгиба прямоугольной пластины использовался специализированный инструментальный ПК ANSYS, основанный на конечном элементе SOLID226 [17, 23]. Геометрия, размещение узлов и система координат (ЛСК) этого элемента представлены на рис. 3.

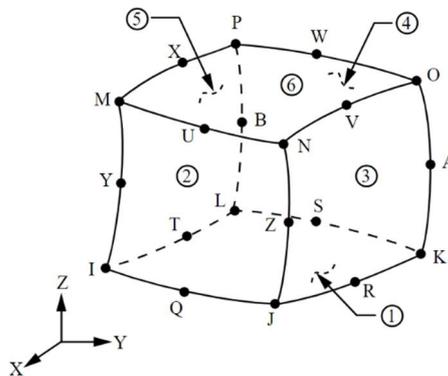


Рис. 3. 20-узловой КЭ SOLID226

Применение вариационного метода к уравнениям движения, закону сохранения тепловой энергии и уравнению термоупругости приводит к формированию системы матричных уравнений метода конечных элементов (МКЭ). Компоненты этой матрицы могут быть вычислены с использованием аналогичных подходов, описанных ранее для элементов в форме тетраэдра (см. рис. 2) [12].

Для симуляции некоторого варианта разномодульности материала [23] в программном обеспечении ANSYS используется опция TB, EXPE [17], которая позволяет вводить значения напряжений и деформаций материала, полученных экспериментально, непосредственно в виде числовых значений (в том числе, нелинейных диаграмм деформирования). Это позволяет более точно описать поведение материала под нагрузкой. В качестве примера был ис-

пользован конструкционный графит АРВ [20], для которого были введены диаграммы деформирования при одноосном растяжении и сжатии. Эти данные были получены экспериментально и введены в программу через специальный интерфейс, который также позволяет визуализировать диаграммы в графическом виде [23] (см. рис. 4).

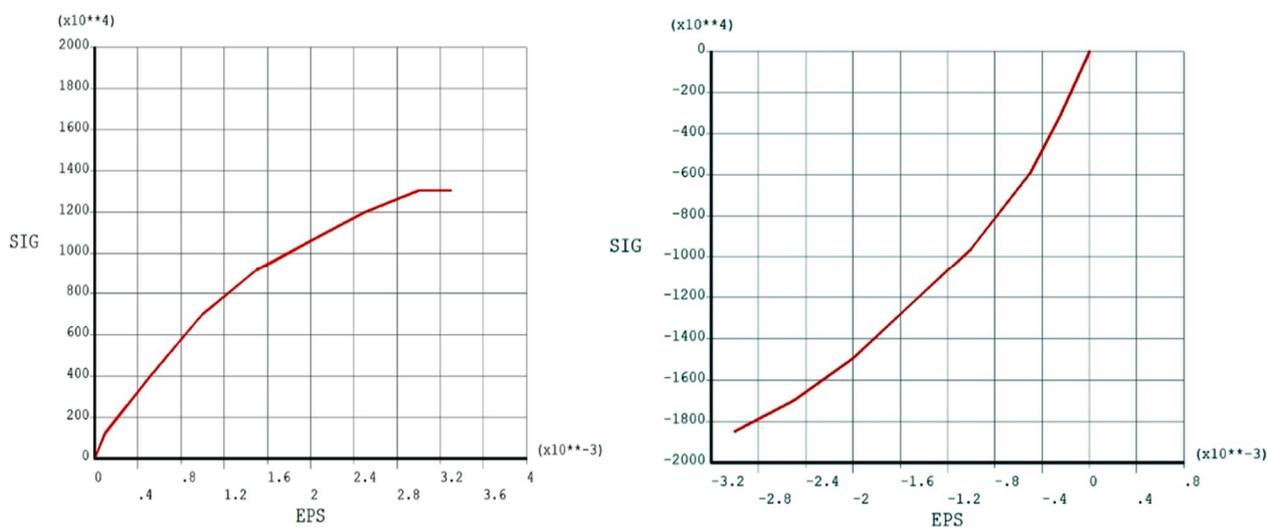


Рис. 4. Диаграммы деформирования графита АРВ [2, 20], как они показаны в интерфейсе ПК ANSYS (слева диаграмма растяжения, а справа – сжатия)

Результаты расчетов. Для подтверждения достоверности и адекватности использования указанных возможностей ПК ANSYS, обсуждаемых в этой статье, мы проводим сравнение результатов расчета пластины (рис. 1) с результатами решения аналогичной задачи с помощью программы для ЭВМ [14]. Эта программа была разработана М.Ю. Делягиным и В.Г. Теличко, на основе проверенной временем теории, представленной в исследованиях А.А. Трещева и Н.М. Матченко [1, 2]. Механические свойства графита АРВ были приняты в соответствии с материалами [2, 13], расчет велся с использованием объемных изопараметрических конечных элементов (см. рис. 2).

В данной статье рассматриваются несколько вариантов расчета, необходимые для определения степени влияния различных факторов на количественные оценки НДС в пластине. В целом представлены 6 вариантов, условно обозначенных как «Модель №1» - «Модель №6».

1. Во-первых, рассмотрим «Модель №1», которая была рассчитана с помощью программного комплекса ANSYS. Эта модель учитывает нелинейное механическое поведение материала при нагрузке на растяжение и сжатие (рис. 4), а также учитывает связанность задачи.

2. Далее обратим внимание на «Модель №2», которая также была рассчитана в системе ANSYS. Данная модель учитывает нелинейность материала и различную работу на растяжение-сжатие, но не учитывает температурное воздействие (данный вариант учитывает только механическое воздействие).

3. «Модель №3», также рассчитанная в системе ANSYS, не учитывает разномодульную работу материала (разносопротивляемость), но также учитывает решения в связанной постановке, как и «Модель №1».

4. Теперь рассмотрим «Модель №4», числовое решение для которой было рассчитано в отдельной программе [14]. Для расчета этой модели была использована теория нелинейных разносопротивляющихся изотропных материалов, разработанная А.А. Трещёвым и Н.М. Матченко. Эта модель также учитывает решение в связанной постановке и зависимость температурных характеристик материала от механических напряжений и наоборот [10].

5. Для «Модели №5», которая, как и Модель №2, была рассчитана в системе ANSYS, использовался элемент SOLID226 в своей «деградировавшей» форме (элемент приведен к форме тетраэдра путем совмещения узлов).

6. Для «Модели №6» расчет выполнен аналогично случаю №1, где вместо прямого задания экспериментальных данных использовались аппроксимации одноосных диаграмм деформирования, полученных из работ А.А. Трещёва и Н.М. Матченко [1, 2].

На рис. 5-9 приведены наиболее показательные результаты проведенных численных экспериментов по расчету в ПК ANSYS и их сравнению с теорией деформирования разносопротивляющихся материалов.

На рис. 5 приведен график вертикальных перемещений в пластинке вдоль диагонали. Учёт эффекта различного механического поведения при растяжении и сжатии составляет до 12%. Отличия решения «Модели №1» и теории деформирования разносопротивляющихся материалов Трещёва А.А. на базе объёмных КЭ в форме тетраэдра при решении связанной задачи термоупругости («Модель №4»), предложенной в работе [12], не превышает 6% в величине прогиба.

Влияние эффекта совместного температурного и механического воздействия на величину вертикальных перемещений составляет до 22%. Разница между «Моделью №1» и «Моделью №6» составляет не более 4% в величине прогиба.

На рис. 6, 7 представлены графики касательных напряжений на поверхностях пластинки. Влияние эффекта разномодульности (разносопротивляемости) для значений касательных напряжений составляет на нижней поверхности до 18% и на верхней – до 27%. Отклонение результатов расчёта по «Модели №1» и «Модели №4», предложенной в [12, 14], не превышает 5%.

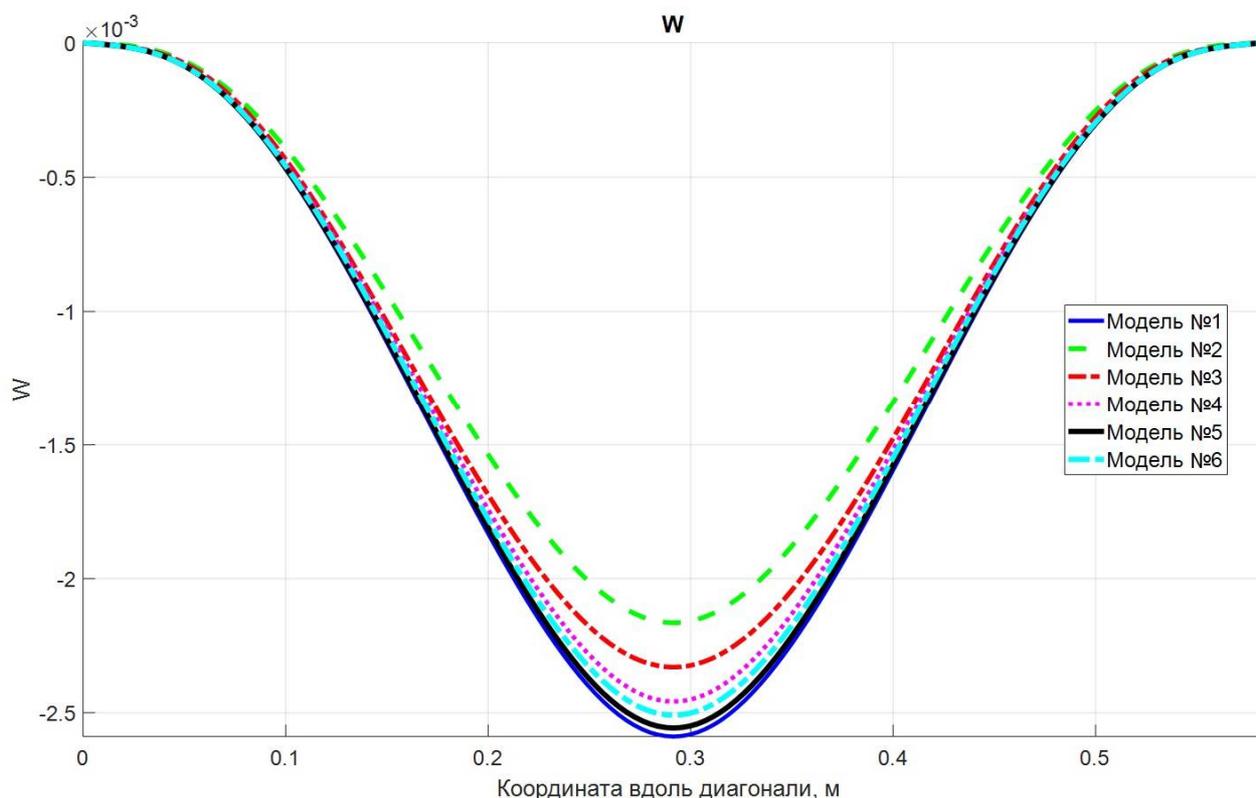


Рис. 5. Вертикальные перемещения в пластинке вдоль оси симметрии, м

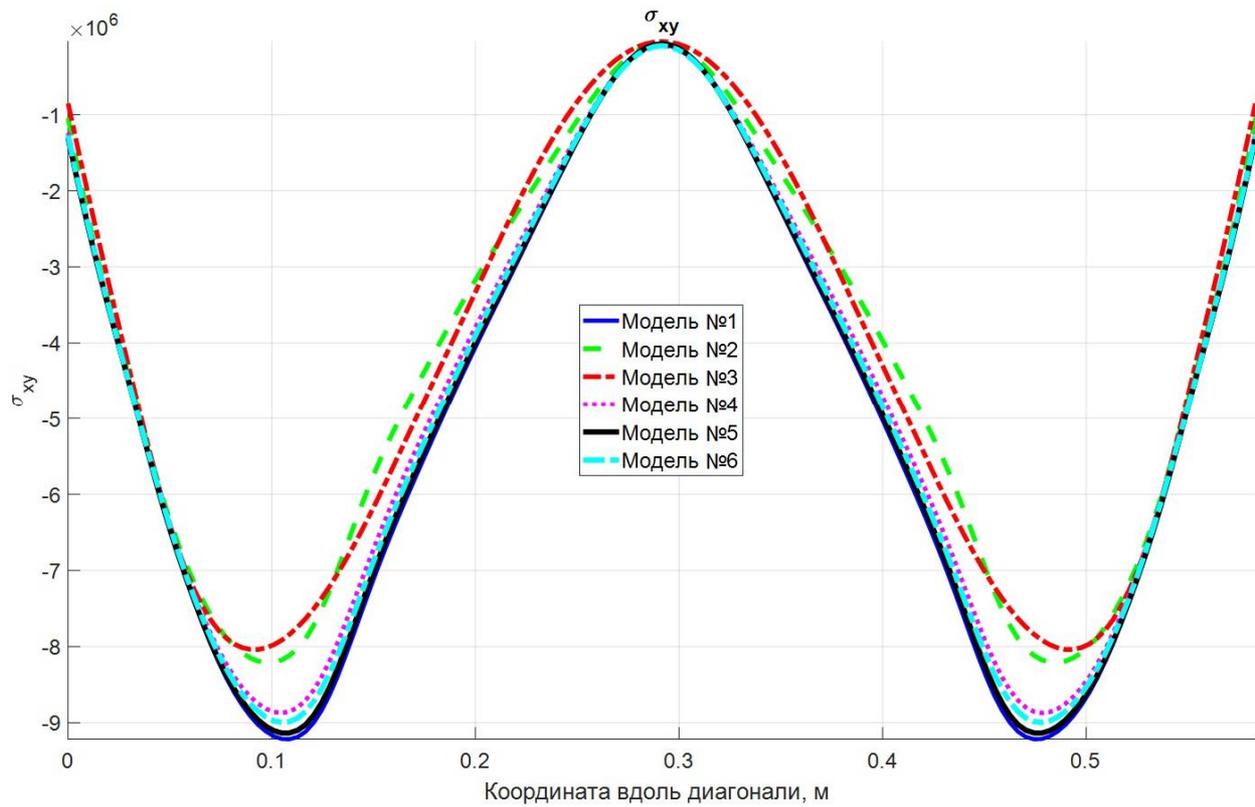


Рис. 6. Распределение напряжений σ_{xy} на нижней поверхности пластины вдоль оси симметрии, Па

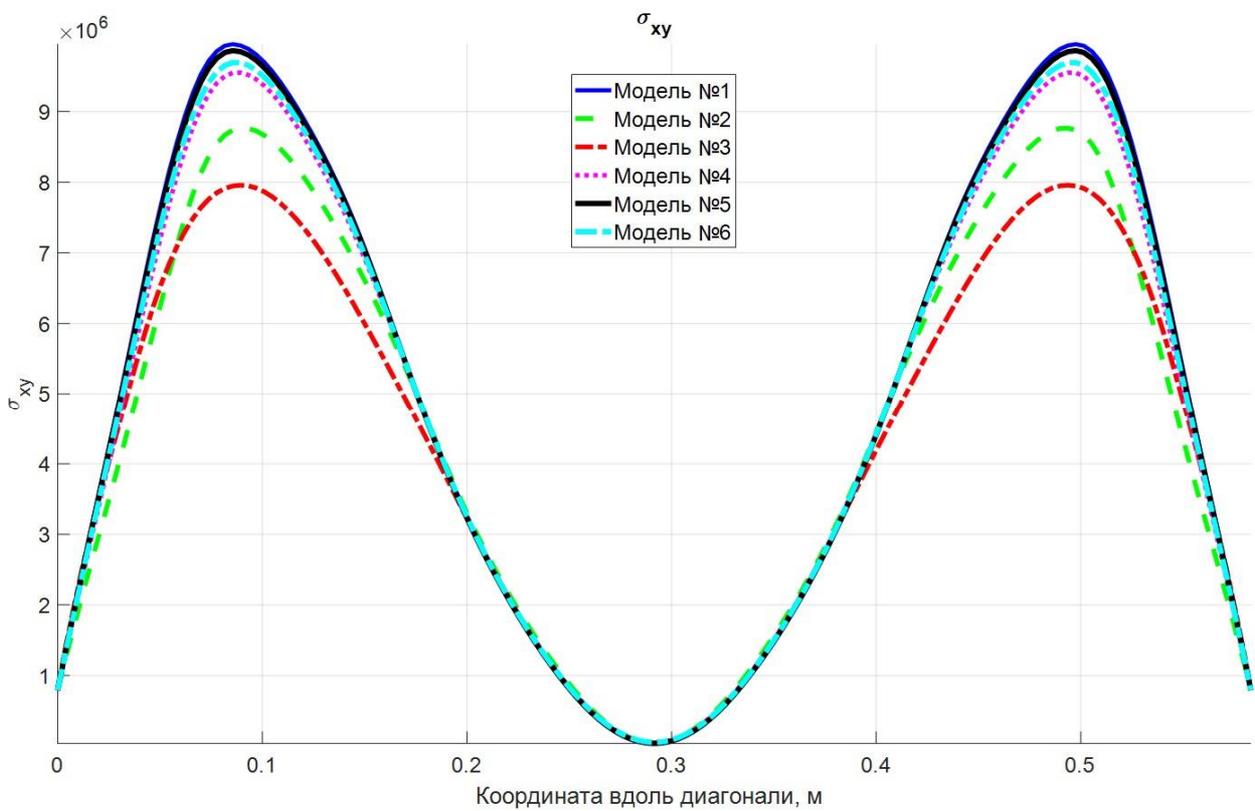


Рис. 7. Распределение напряжений σ_{xy} на верхней поверхности пластины вдоль оси симметрии, Па

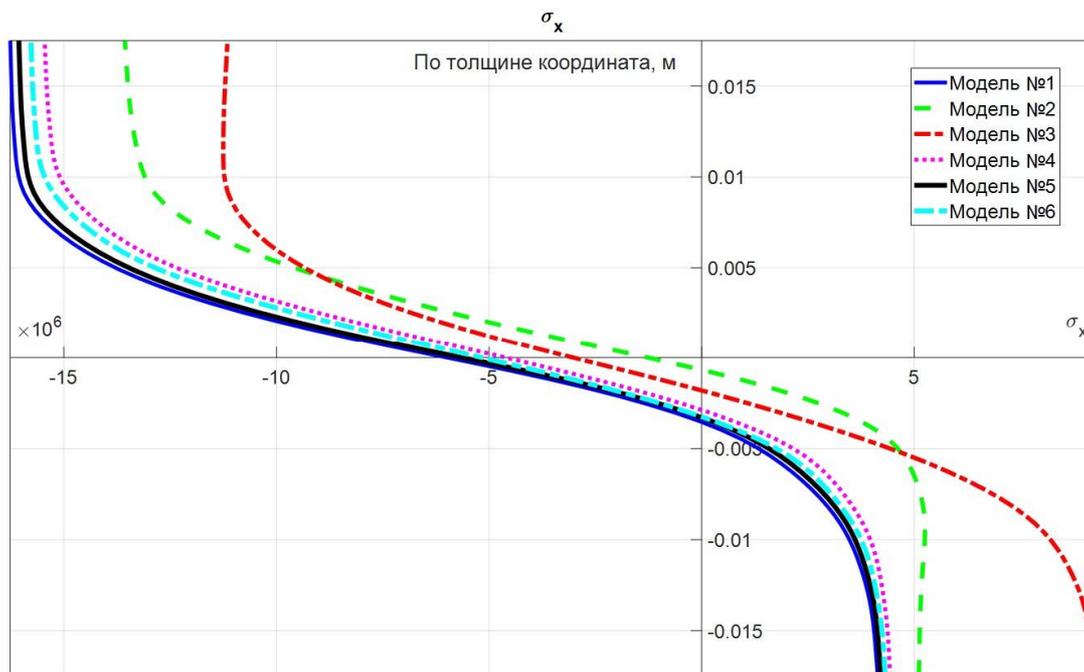


Рис. 8. Распределение напряжений σ_x по толщине в центре плана, Па

Оценка величин напряжений для варианта расчета, выполненного с учетом температурного воздействия для касательных напряжений, находится в пределах 15%. При этом использование в расчётах конечного элемента в форме тетраэдра вместо полноценного SOLID226 приводит к весьма близким результатам, отличающимся незначительно (<2%). Использование «Модели №6» вместо «Модели №1» вызывает поправку, не превышающую 4-5% к величине напряжений на верхней и нижней поверхностях пластинки.

Графики распределения напряжений σ_x и σ_y по толщине в центре плана пластины показаны на рис. 8 и 9.

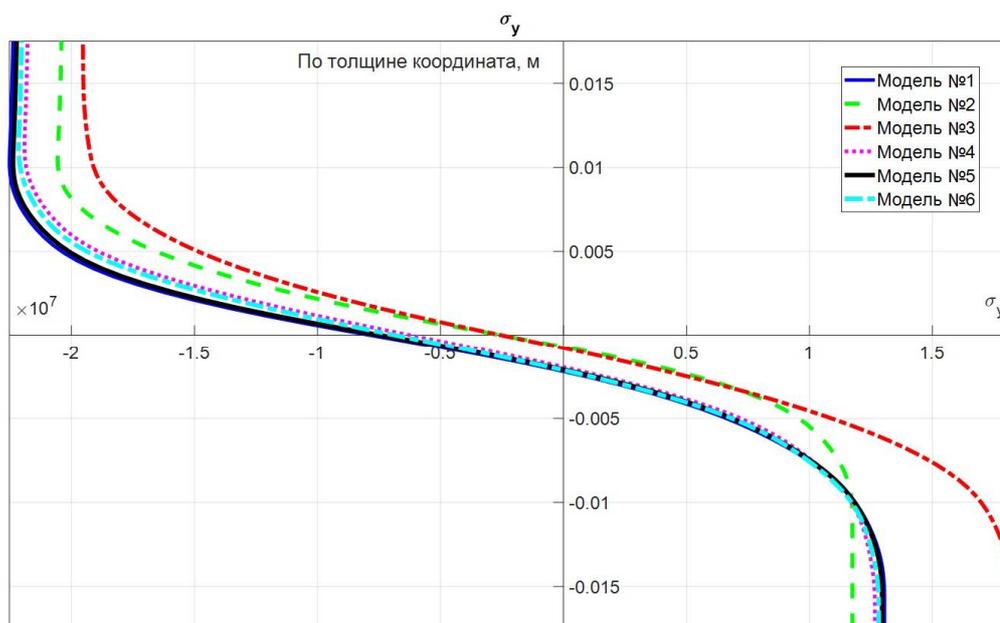


Рис. 9. Распределение напряжений σ_y по толщине в центре плана, Па

Здесь следует обратить внимание на пару качественных эффектов: существенно нелинейный характер распределения напряжений по толщине пластинки дополнен значительным смещением положения нейтральной поверхности пластинки от традиционной отметки. Влияние эффекта различного поведения графита АРВ при растяжении и сжатии достигает 65%. Количественное расхождение решения по предлагаемой к использованию «Модели №1» и «Модели №4», предложенной в [12, 14], не превосходит 6-9% к величине нормальных напряжений по толщине пластинки.

Оценки величины напряжений σ_x и σ_y в центре пластинки показывают, что учет поля температуры вносит поправки в их расчетные величины до 25% в зависимости от координаты по толщине. При этом переход от полноценного SOLID226 к его «деградировавшей» форме тетраэдра даёт весьма похожие результаты, отличающиеся в пределах $\pm 3-5\%$. Сравнение «Модели №1» с «Моделью №6» вносит поправку также в пределах 5%.

Выводы. Итак, в настоящем исследовании было рассмотрено числовое решение задачи о прогнозировании НДС тонкой прямоугольной пластинки из изотропного нелинейного разносопротивляющегося материала средствами МКЭ в условиях термомеханического изгиба средствами ПК ANSYS и программного обеспечения, основанного на теории [14]. Указанная задача была решена с учетом задания граничных условий третьего рода в форме условий конвективного теплообмена со средами, на разделе которых находится пластина.

Результаты работы подтверждают важность учета в расчетной практике эффектов связанных с различной механической работой материалов на растяжение и сжатие, а также теплового воздействия при решении связанной нестационарной задачи термомеханического изгиба тонкой прямоугольной пластины.

Эти выводы согласуются с теоретическими результатами, полученными авторами этого исследования, ранее в публикациях [10, 14].

Библиографический список

1. Матченко Н.М., Трещёв А.А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости. – М.-Тула: РААСН; ТулГУ, 2004. – 211 с.
2. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. – М.-Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 328 с.
3. Авхимков А.П. О плоской задаче разномодульной теории упругости // Доклады 9-й науч.-техн. конф. инж. факультета Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. – 1974. – С. 39-43.
4. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. К разномодульной теории упругости // Инж. журнал МТТ. – 1966. – № 6. – С. 64-67.
5. Бертяев В.Д., Толоконников Л.А. Вариант построения теории упругости разносопротивляющихся тел // Механика и прикладная математика. – Тула: Приокс. кн. изд-во, 1989. – С. 4-7.
6. Бригадиров Г.В., Матченко Н.М. Вариант построения основных соотношений разномодульной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. – № 5. – С. 109-111.
7. Быков Д.Л. О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах // Упругость и неупругость. – М.: МГУ, 1971. – Вып. 2. – С. 114–128.
8. Гаврилов Д.А. Зависимости между напряжениями и деформациями для квазилинейного разномодульного тела // Проблемы прочности. – 1979. – № 9. – С. 10-12.

9. Золочевский А.А. К тензорной связи в теориях упругости и пластичности анизотропных композитных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 1. – С. 53-58.
10. Теличко В.Г., Чигинский Д.С., Петров А.А. Решение задачи об изгибе тонкой прямоугольной пластины из разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2009. – № 1-2. – С. 114-120.
11. Трещёв А.А., Делягин М.Ю., Астахов Д.С. Математическая модель связанной термоупругости существенно нелинейных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния // *Вестник Чувашияского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*. – 2013. – № 3(17). – С. 65-72.
12. Трещев А.А., Делягин М.Ю. Моделирование оболочки из изотропного разносопротивляющегося графита с помощью объемных конечных элементов с учетом связанности напряжений и температур // *Materials Physics and Mechanics*. – 2013. – Vol. 17. – № 1. – P. 59-70.
13. Трещев А.А., Делягин М.Ю. Связанный термомеханический расчёт оболочки из графитокompозита с учетом существенно нелинейной разносопротивляемости // *Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер. Материалы. Конструкции. Технологии*. – 2019. – № 3. – С. 101-110.
14. Трещев А.А., Теличко В.Г., Делягин М.Ю. Модель термомеханического деформирования оболочек в связанной постановке, выполненных из дилатирующих материалов // *Устойчивое развитие региона: архитектура, строительство, транспорт: материалы 5-й Междунар. науч.-практ. конф. Института архитектуры, строительства и транспорта*. – Тамбов, 2018. – С. 43-49.
15. Спасская М.В., Трещев А.А. Термомеханическая задача для пологой сферической оболочки из материала с усложненными свойствами // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2018. – Вып. № 5(280). – С. 58-65.
16. Takeuti Y., Tanigawa Y. On a new method for axisymmetric coupled thermoelastic problems // *Journal of Thermal stresses*. – 1981. – Vol. 4. – № 3-4. – P. 461-478.
17. Ansys Inc. Documentation for Release 2021 R1.
18. Трещев А.А., Теличко В.Г., Ходорович П.Ю. Моделирование напряженно-деформированного состояния толстых цилиндрических оболочек из материалов с усложненными свойствами // *Materials Physics and Mechanics*. – 2014. – Vol. 21. – № 1. – С. 38-50.
19. Трещев А.А., Теличко В.Г., Ходорович П.Ю. Расчет цилиндрических оболочек покрытий транспортных сооружений из материалов с усложненными свойствами // *Транспортное строительство*. – 2014. – № 9. – С. 24-27
20. Березин А.В., Строков В.И., Баранов В.Н. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов // *Конструкционные материалы на основе углерода*. – М.: Металлургия, 1976. – Вып. 11. – С. 102-110.
21. Hart P.E. The effect of prestressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite // *Carbon*. – 1972. – Vol. 10. – P. 233-236.
22. Nye J.F. *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*. // Clarendon Press. Oxford, 1957. – 377 p.
23. Чигинская И.А., Теличко В.Г., Чигинский Д.С. К решению связанной задачи термомеханического изгиба конструкций из изотропных разносопротивляющихся материалов методом конечных элементов // *Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: материалы 18-й Междунар. конф.* – Тула-Минск-Донецк: ТулГУ, 2022. – С. 251–255.

References

1. Matchenko N.M., Treschev A.A. Theory of deformation of materials with different resistances. Applied problems of the theory of elasticity. M.-Tula: RAASN. Tula State University, 2004. 211 p.
2. Treshchev A.A. Theory of deformation and strength of materials with initial or induced sensitivity to the type of stress state. Constitutive relations. M.-Tula: RAASN. Tula State University, 2016. 328 p.
3. Avkhimkov A.P. On the plane problem of multi-module theory of elasticity. Reports of the 9th Scientific-Technical Conf. Engineering Department of Patrice Lumumba Peoples' Friendship University of Russia. 1974. Pp. 39-43.
4. Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A. Towards a multi-module theory of elasticity. Engineering MTT Journal. No. 6. 1966. Pp. 64-67.
5. Bertyaev V.D., Tolokonnikov L.A. A variant of constructing the theory of elasticity of differently resisting bodies. Mechanics and Applied Mathematics. Tula: Priox Book Publishing House, 1989. Pp. 4-7.
6. Brigadirov G.V., Matchenko N.M. A variant of constructing the basic relations of multi-module theory of elasticity. News of USSR Science Academy. MTT. 1971. No. 5. Pp. 109-111.
7. Bykov D.L. On some relationships between stress and strain invariants in physically nonlinear media. Elasticity and Inelasticity. M.: MSU, 1971. Issue. 2. Pp. 114-128.
8. Gavrilov D.A. Dependences between stresses and strains for a quasi-linear body of different moduli. Problems of Strength. No. 9. 1979. Pp. 10-12.
9. Zolochovsky A.A. On the tensor connection in the theories of elasticity and plasticity of anisotropic composite materials with different resistance to tension and compression. Mechanics of Composite Materials. No. 1. 1985. Pp. 53-58.
10. Telichko V.G., Chiginsky D.S., Petrov A.A. Solution of the problem of bending a thin rectangular plate made of materials with different resistances under conditions of thermomechanical loading. News of Tula State University. Technical Science. 2009. No. 1-2. Pp. 114-120.
11. Treschev A.A., Delyagin M.Yu., Astakhov D.S. Mathematical model of coupled thermoelasticity of essentially nonlinear materials, sensitive to the type of stress state. Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Ser. Limit state Mechanics. No. 3(17). 2013. Pp. 65-72.
12. Treshchev A.A., Delyagin M.Yu. Modeling of a shell made of isotropic differently resistive graphite using volumetric finite elements taking into account the coupling of stresses and temperatures. Material Physics and Mechanics. Vol. 17. No. 1. 2013. Pp. 59-70.
13. Treshchev A.A., Delyagin M.Yu. Related thermomechanical calculation of a graphite composite shell taking into account significantly nonlinear resistance differences. Bulletin of the Volga State Technological University. Ser. Materials. Constructions. Technologies. No. 3. 2019. Pp. 101-110.
14. Treshchev A.A., Telichko V.G., Delyagin M.Yu. Model of thermomechanical deformation of shells in a coupled formulation, made of dilating materials. Sustainable Development of the Region: Architecture, Construction, Transport: Materials of the 5th International Scientific and Practical Conf. Institute of Architecture, Construction and Transport. Tambov, 2018. Pp. 43-49.
15. Spasskaya M.V., Treshchev A.A. Thermomechanical problem for a flat spherical shell made of a material with complicated properties. Structural Mechanics and Calculation of Structures. No. 5(280). 2018. Pp. 58-65.

16. Takeuti Y., Tanigawa Y. On a new method for axisymmetric coupled thermoelastic problems. *Journal of Thermal Stress*. Vol. 4. No. 3-4. 1981. Pp. 461-478.
17. Ansys Inc. Documentation for Release 2021 R1.
18. Treshchev A.A., Telichko V.G., Khodorovich P.Yu. Modeling the stress-strain state of thick cylindrical shells made of materials with complex properties. *Material Physics and Mechanics*. Vol. 21. No. 1. 2014. Pp. 38-50.
19. Treshchev A.A., Telichko V.G., Khodorovich P.Yu. Calculation of cylindrical shells of coverings of transport structures made of materials with complicated properties. *Transport Construction*. No. 9. 2014. Pp. 24-27
20. Berezin A.V., Strokov V.I., Baranov V.N. Deformability and fracture of isotropic graphite materials. *Carbon-Based Structural Materials*. Issue. 11. M.: Metallurgy, 1976. Pp. 102-110.
21. Hart P.E. The effect of prestressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite. *Carbon*. Vol. 10. 1972. Pp. 233-236.
22. Nye J.F. *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*. Clarendon Press. Oxford, 1957. 377 p.
23. Chiginskaya I.A., Telichko V.G., Chiginsky D.S. To the solution of the related problem of thermo-mechanical bending of structures made of isotropic materials with different resistances using the finite element method. *Socio-Economic and Environmental Problems of the Mining Industry, Construction and Energy: Materials of the 18th Intern. Conf. Tula-Minsk-Donetsk: Tula State University, 2022*. Pp. 251–255.

SOLUTION OF A COUPLED THERMOMECHANICAL PROBLEM IN MODERN CAE-COMPLEXES AND VERIFICATION

V. G. Telichko¹, D. S. Chiginsky², I. A. Chiginskaya³

Tula State University^{1,2,3}
Tula, Russia

¹Dr. of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction, Building Materials and Structures, Tel. +7 (952)0198465, e-mail: katranv@yandex.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction, Building Materials and Structures, Tel. +7 (920)2768672, e-mail: dmitriy@chiginskiy.ru

³Postgraduate student of the Department of Construction, Building Materials and Structures, Tel. +7 (920)2752912, e-mail: irtyla@yandex.ru

This research investigates modern approaches to determining the stress-strain state of a thin plate made of initially isotropic material, subjected to coupled thermo-mechanical loading conditions. Methods for solving the problem of coupled thermoelasticity are described, including those within the ANSYS computational package, which now enables the consideration of various deformations in physically nonlinear materials under tension and compression. Solutions are obtained for a structural element made of a material with physical and mechanical characteristics dependent on the type of stress state. A numerical solution to the coupled problem is presented for a thin rectangular plate subjected to mechanical and thermal loads, considering the physical nonlinearity of the material. The findings are compared with previously obtained solutions based on established theories of deformation for materials with varying resistance, utilizing volumetric isoparametric finite elements and accounting for temperature effects.

Keywords: resistance difference, isotropy, connectivity, thermoelasticity, plate, graphite composite, Finite Element Method, ANSYS, verification.